

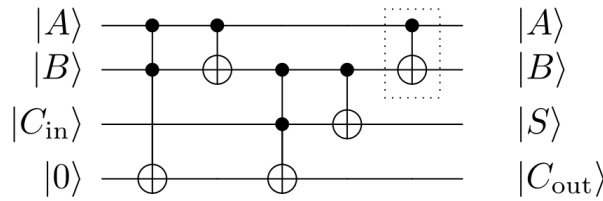
## Problema C

## Circuitos Lógicos Matriciais

Tempo limite: 0,5 s	Limite de memória: 1 GiB
---------------------	--------------------------

Na computação quântica, as portas lógicas funcionam de um jeito um pouco diferente. Portas lógicas quânticas são reversíveis e o número de qubits de entrada é igual ao número de qubits de saída. Além disso, elas podem ser representadas por matrizes  $2^N$  por  $2^N$ , onde  $N$  é o número de qubits.

Um circuito quântico é um modelo para computação quântica onde a computação é realizada através de uma sequência de portas lógicas quânticas e dispositivos de medição. Uma sequência de portas lógicas pode ser representada por uma matriz resultante da multiplicação das matrizes das portas lógicas em ordem de aplicação, que é a ordem inversa de como elas são representadas graficamente. Por exemplo, o circuito de adição de dois bits em seu forma quântica é:



Temos nesse circuito duas variações de uma porta lógica que chamaremos de  $\text{CNOT}(q_c, q_t)$  e  $\text{CCNOT}(q_{c_1}, q_{c_2}, q_t)$ . No desenho, o qubit  $q_t$  aparece marcado com um  $\oplus$ . A porta lógica  $\text{CNOT}(q_c, q_t)$  pode ser vista como sendo igual a  $\text{CCNOT}(q_c, q_c, q_t)$ , ou seja, a aplicação da porta lógica  $\text{CCNOT}$  com  $q_c = q_{c_1} = q_{c_2}$ .

A porta lógica  $\text{CCNOT}(q_{c_1}, q_{c_2}, q_t)$  tem o comportamento de inverter o qubit  $q_t$  da saída se os qubits de controle  $q_{c_1}$  e  $q_{c_2}$  ambos estiverem ligados. Matematicamente,  $q'_t = q_t \oplus (q_{c_1} \wedge q_{c_2})$ . Na sua forma de matriz,

$$\text{CCNOT}(q_{c_1}, q_{c_2}, q_t)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ tem os bits } c_1 \text{ e } c_2 \text{ ligados e } i \oplus 2^t = j \\ 0 & \text{se } i \text{ tem os bits } c_1 \text{ e } c_2 \text{ ligados e } i \oplus 2^t \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde  $i$  é a linha e  $j$  a coluna com  $0 \leq i, j < 2^N$ , e  $i$  contém o bit  $k$  ( $0 \leq k$ ) se  $\lfloor \frac{x}{2^k} \rfloor \bmod 2 = 1$ . A operação  $\oplus$  é a operação bit a bit de ou exclusivo, comumente o  $\wedge$  em linguagens de programação.

Desta forma, a matriz do circuito quântico de adição de dois bits é dada por

$$\text{CNOT}(q_0, q_1) \text{CNOT}(q_1, q_2) \text{CCNOT}(q_1, q_2, q_3) \text{CNOT}(q_0, q_1) \text{CCNOT}(q_0, q_1, q_3),$$

onde os qubits  $q_0, q_1, q_2, q_3$  são utilizados com entrada  $|A\rangle, |B\rangle, |C_{\text{in}}\rangle, |0\rangle$  respectivamente e resultam em  $|A\rangle, |B\rangle, |S\rangle, |C_{\text{out}}\rangle$  respectivamente.

Sua missão é dada a descrição de um circuito com portas lógicas  $\text{CNOT}$  e  $\text{CCNOT}$  na ordem de aplicação, imprimir a matriz resultante.

**Entrada**

A primeira linha da entrada contém os inteiros  $N$  ( $2 \leq N \leq 8$ ), o número de qubits do circuito e  $M$  ( $1 \leq M \leq 10^5$ ), a quantidade de portas lógicas do circuito.

Seguem  $M$  linhas, cada uma com a descrição de uma porta lógica. O primeiro inteiro  $T$  ( $1 \leq T \leq 2$ ) define o tipo da porta lógica. Se  $T = 1$ , a descrição é da porta lógica  $\text{CNOT}(q_C, q_T)$  e seguem os inteiros distintos  $C$  e  $T$  ( $0 \leq C, T < N$ ). Se  $T = 2$ , a descrição é da porta lógica  $\text{CCNOT}(q_{C_1}, q_{C_2}, q_T)$  e seguem os inteiros distintos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $T$  ( $0 \leq C_1, C_2, T < N$ ). Note que as portas lógicas são dadas na ordem de aplicação.

## Saída

Imprima  $2^N$  linhas, cada uma com exatamente  $2^N$  caracteres '0' ou '1', correspondendo a matriz do circuito quântico completo.

Exemplo de entrada 1	Exemplo de saída 1
2 1 1 0 1	1000 0001 0010 0100

*Explicação do exemplo 1:*

Este circuito representa apenas a porta lógica  $\text{CNOT}(c, t)$ . Se você já leu sobre essa porta lógica, a matriz parece estar errada pois é diferente da que está na literatura. Porém, é uma questão de convenção. Ao compormos o qubit  $c$  com o qubit  $t$ , aqui estamos usando a convenção de que o primeiro bit é menos significativo que o segundo.

$$\begin{array}{l}
 i=0 \text{ representando } |00\rangle \text{ com } c=0 \text{ e } t=0 \\
 i=1 \text{ representando } |01\rangle \text{ com } c=1 \text{ e } t=0 \\
 i=2 \text{ representando } |10\rangle \text{ com } c=0 \text{ e } t=1 \\
 i=3 \text{ representando } |11\rangle \text{ com } c=1 \text{ e } t=1
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Então se entrada for  $|00\rangle$  ou  $|10\rangle$ , ambos onde  $c = 0$  e  $t$  varia, a porta lógica não atua. Quando a entrada é  $|01\rangle$  ou  $|11\rangle$ , então a porta lógica atua e inverte o valor de  $t$ . Essa convenção é utilizada por exemplo pela biblioteca Qiskit.

Exemplo de entrada 2	Exemplo de saída 2
4 5 1 0 1 1 1 2 2 1 2 3 1 0 1 2 0 1 3	1000000000000000 0000000000000100 0000000000000010 0000000000010000 0000100000000000 0100000000000000 0010000000000000 0000000000000001 0000000010000000 0000010000000000 0000001000000000 0001000000000000 0000000000001000 0000000001000000 0000000000100000 0000000100000000

<b>Exemplo de entrada 3</b>  3 1 2 0 1 2	<b>Exemplo de saída 3</b>  10000000 01000000 00100000 00000001 00001000 00000100 00000010 00010000
<b>Exemplo de entrada 4</b>  3 1 1 0 1	<b>Exemplo de saída 4</b>  10000000 00010000 00100000 01000000 00001000 00000001 00000010 00000100